האינטגרל המסויים

השאלה העיקרית: איך מחשבים השטח מתחת לגרף של פונקציה?

נניח שf רציפה וחיובית ב. נחלק את הקטע דרך החלוקה לתת קטעים ונגדיר:נתבונן בסכומים:

אם מסתכלים על המלבנים שגובהם הוא הערך המקסימלי של הפונקציה בתוכם, רואים שסכומם הוא והוא גדול מהשטח מתחת לגרף הפונקציה.  
אם מסתכלים על המלבנים שגובהם הוא הערך המינימלי של הפונקציה בתוכם, רואים שסכומם הוא והוא קטן מהשטח מתחת לגרף הפונקציה.

ידוע לנו שf רציפה במ"ש על , לכן לכל קיים כך שאם אזי .  
לכן קיים כך שאם () אזי . לכן אם נסמן ואם אזי

*תהי f פונקציה ותהי חלוקה של . נתבונן בסכומים(סופיים) מהצורה  
באשר .  
קוראים ל כזאת סכום רימן(Riemann) עבור f בקטע* – הפרמטר של

נניח שקיים כך שלכל קיים כך שאם אזי (לכל בחירה של ). אזי נכתוב:  
 *נקרא האינטגרל המסויים(לפי רימן) של f על .*

*במקרה שהאינטגרל קיים, נגיד שf אינטגרבילית על*

# דוגמאות

1. תהי , אזי הפונקציה אינטגרבילית על כל קטע ומתקיים  
   הוכחה: לכל חלוקה T ולכל בחירה של הנקודות מתקיים:
2. הפונקציה אינה אינטגרבילית על שום קטע. אמנם תהי T חלוקה של ונתבונן בשני סכומים של רימן המתאימים לT, הראשון המוגדר ע"י באשר כל והשני ע"י באשר כל . אזי:

# משפט

אם f אינטגרבילית על אזי היא חסומה שם.

### הערה

הכיוון השני לא נכון, כפי שרואים מהדוגמה הקודמת.

## הוכחה

נניח שf אינה חסומה על . תהי חלוקה של . קיים לפחות תת קטע אחד בו f אינה חסומה. נבחר נקודות עבור באופן כלשהו, ונסמן . נבחר כך ש. אזי:  
כאשר . לכן לא קיים

סכומי דרבו(Darboux)

תהי פונקציה חסומה, T חלוקה של . נסמן . סכומי דרבו הם:

# למה

(על כל הבחירות של הנקודות ). מתקיים:

# טענה

## הוכחה

יהי . לכל יש כך ש. עם הבחירה של נקודות מתקיים  
הוכחנו ש. פירוש הדבר ש

# טענה

## הוכחה

תרגיל

# הגדרה

תהיינה חלוקות של . נגיד ש הינה העדנה(refinement) של T אם .

# למה

אם הינה העדנה של T אזי .

## הוכחה

נוכיח ש במקרה ש נתקבלה ע"י הוספת נקודה אחת לT(ואז המשפט נובע מאינדוקציה). תהי ונניח ש

# הגדרה

תהי f חסומה על . התנודה של f על מוגדר ע"י

# למה

אם מתקבלת מT ע"י הוספת p נקודות אזי:

## הוכחה

נוכיח את אי השוויון הראשון(הוכחת השני דומה לחלוטין). שוב מספיק להוכיח את הטענה כאשר (בְּדוֹק!).

אז נניח ש מתקבל ע"י הוספת נקודה אחת, כמו בהוכחה הקודמת.  
⇦ כאשר

# למה

תהיינה חלוקות של , אזי (תזכורת – אנו מדברים על פונקציות חסומות ב)

## הוכחה

תהי , אזי:

תהי חסומה. נסמן . אזי:

תהיינה חלוקות של . אזי:  
האינטגרל העליון לפי דרבו = = האינטגרל התחתון